数理解析研究所講究録
51巻 1968年 1-10

積の形の函数による近似

一松 信（立教大理）

1. 問題のおこり

この問題はまだ手をつけ始めたばかりで，未完成なものであるが，中間報告として現状をのべたい．

問題は2変数の函数 $\varphi(x,y)$ を，積の形の函数

(1) $$f(x)\cdot g(y)$$

によって近似しようということである．函数が x,y について対称なときには，$f(x)\cdot f(y)$ の形による近似も考えられる．

これは一見いささか無茶な問題である．分離形の函数による級数 $\sum f_i(x)\cdot g_i(y)$ で近似することは，古くから実用にされているが，ただ一項では，たいていの場合よい近似はえられないであろう――たとえ近似度のよくないことを承知で最良近似を純理論的に求めることを試みるにしても．――

ことのおこりは次のとおりである．Brookhaven 研究所に留学中（1967年3月頃），応用数学部長を通じて，つぎのような問題をもちこまれた．長方形領域で，$\Delta u=\rho$ とか $\Delta u+\kappa u=0$ を簡単な境界値（たとえば0）でときたい．そのとき，解を $u=f(x)\cdot g(y)$ の形に仮定し，まず $g(y)$

を適当に仮定し，$y=y_0$ を中央付近に固定して，問題を $f(x)$ に関する常微分方程式に直す．その解 $f(x)$ を仮定して，次には $g(y)$ に関する常微分方程式に直してとく．これを数回反復すると，かなり早く f も g も収束し，しかもその解 $f(x)\cdot g(y)$ は，真の解 $u(x,y)$ にかなり近い．このような一種の ADI（交互方向反復法）の数学的基礎づけを求めたい．

f, g が収束することも数学の問題として興味あるが，それよりも，このような一見勝手な仮定が，実用上十分に使えるような近似解を導びくことに興味をひかれた．この場合の真の解が，(1) の形の函数で十分によく近似できる性格のものではないか．とすればそのような性格とは何であろうか？

じつはこの場合，L_∞ のノルムでの最良近似を論じてみたかった（これは現在でも私にとって宿題になっている）．しかしこれまでの最良近似の理論は，すべて近似すべき函数の族が有限次元であることが本質的に使われている．——じつは有限次元でなくてもよいが，単位球が弱位相でコンパクト，したがって空間が再歸的（反射的）な Banach 空間でないと，そのままでは適用し難く，再歸的でない空間 C には適用しない．それで L_2 の近似，すなわち最小2乗近似としたところ，一つの結果がえられたので，報告する次第である．

当面の問題は つぎの とおりである.

1°. 区間 $I=\{a\leqq x\leqq b,\ c\leqq y\leqq d\}$ で L_2 に属する $\varphi(x,y)$（とくに連続函数）があるとき, $L_2(a,b)\ni f$, $L_2(c,d)\ni g$ をみつけて, 差の L_2 ノルム

(2) $$\iint_I |\varphi(x,y)-f(x)\cdot g(y)|^2\, dx\,dy$$

を最小にせよ. —— 函数値は複素数値でも同様にできるが ここではすべて実数値とする.

この離散近似として, つぎの問題も考えられる.

2°. 二重数列 α_{ij}, $i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,n$ に対して, 数列 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,m}$; $\{b_j\}_{j=1,\cdots,n}$ をもとめて, l_2 ノルム

(3) $$\sum_{i,j} |\alpha_{ij}-a_i\cdot b_j|^2$$

を最小にせよ.

とくに対称の場合（1 では $a=c$, $b=d$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$; 2 では $m=n$, $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$）には, $f(x)=g(x)$, $b_j=a_j$ とした場合が考えられる。これをそれぞれ, 1′, 2′ として引用することにする. 対称な場合, じっさいに興味あるのは, 正の準定符号の場合である。

2. 離散的な場合の解

まず対称な場合2′ を考える．目的関数

$$\sigma(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i,j} (\alpha_{ij} - a_i a_j)^2$$

の最小値を与える必要条件として $\partial\sigma/\partial a_i = 0 \quad (i=1, \cdots, n)$ を考えると，直接の計算でこの式は

(4) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_j = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) a_i \qquad (i=1, \cdots, n)$$

となる．これは

(5) $$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = \lambda$$

とおくと，λ が対称行列 $A = (\alpha_{ij})$ の固有値，(a_i) がそれに対する固有ベクトルを意味し，このとき

$$\sigma(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}^2 - \lambda^2 = \sum_{\mu \neq \lambda} \mu^2$$

となる．ただし μ は当の λ 以外の固有値である．a_i を実数とすれば $\lambda \geqq 0$（もし a_i が 0 ベクトルでなければ $\lambda > 0$）が要求される．じっさいすべての $\lambda < 0$，すなわち (α_{ij}) が負の定符号であれば $a_i = 0$ のとき σ は最小になる．

対称でない一般の場合には，目的関数を $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n$ の函数として，$\partial\sigma/\partial a_i = 0$，$\partial\sigma/\partial b_j = 0$ を作ると

(6) $$\sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_{ij} = \mu a_i \quad , \quad \mu = \sum_{j=1}^{n} b_j^2$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_{ij} = \lambda b_j \quad , \quad \lambda = \sum_{i=1}^{m} a_i^2$$

となり、これから

(7) $$\sum_{j=1}^{n} b_j \beta_{jk} = \lambda\mu\, b_k \quad , \quad \beta_{jk} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\alpha_{ik}$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i \gamma_{ik} = \lambda\mu\, a_k \quad , \quad \gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{kj}$$

をうる。すなわち $\nu = \lambda\mu$ は正の準定符号行列 $A'A$, AA' の固有値であり、(a_i), (b_i) はそれぞれの固有ベクトルで、

(8) $$\sum a_i^2 \cdot \sum b_j^2 = \nu$$

と標準化されたものである。しかもこのとき

$$\sigma = \sum \alpha_{ij}^2 - \nu \quad , \quad \nu = \lambda\mu$$

であるから、ν が $A'A$, AA' の最大の固有値のとき、σ は最小となる。λ, μ は積 $\lambda\mu$ の形としてのみ意味がある。——それは (a_i) に c, (b_j) に $1/c$ を乗じてもよいからである。

以上をまとめて、次の結果をうる。

<u>定理 1</u> 対称な場合、(α_{ij}) が負の準定符号ならば、$a_i = 0$ が最小二乗近似である。そうでなければ、正の最大の固有値を λ_0、それに対する固有ベクトル (a_i) を (5) のように標準化したとき、(± の符号だけの自由度を除いて)

系1. $\lambda_0>0$ のとき解が（符号を除いて）一意的であるための必要十分条件は，λ_0 が単一固有値であることである．

系2. この近似が正確，すなわち $\alpha_{ij}=a_i\cdot a_j$ となるための必要十分条件は (α_{ij}) がただ1つ正の固有値 λ_0 をもち，他の $(n-1)$ 個の固有値が0になることである．

定理2 一般の問題2に対して 正の半定符号行列 AA'，$A'A$ $(A=(\alpha_{ij})$，A' は転置行列）の最大の固有値を ν とし，それぞれの固有ベクトル (a_i)，(b_j) を (8) のように標準化したものが所要の最小二乗近似を与える．このときには，0以外の固有値は AA'，$A'A$ に（重複度もこめて）一致する．ν が単一固有値ならば，a_i，b_j は定数倍を除いて，一意的に定まる．

以上の考案から，対称な場合には A，一般の場合には $A'A$，AA' が，正の大きな固有値を一つもち，他の固有値が0に近ければ，このような積の形での近似がかなりよいであろうと推察される．

3. 連続変数の場合

2. でのべた問題2の場合と同様にして，つぎのような結果がえられる．

対称な場合には，$L_2 \longrightarrow L_2$ の連続写像

$$(\Phi l)(x) = \int_a^b \varphi(x, y)\, l(y)\, dy$$

を作る．$\varphi(x, y)$ が連続ならば，Φ は完全連続（コンパクト）で，そのスペクトルは点スペクトル（固有値）のみである．Φ が少なくとも一つ正の固有値入

$$\Phi l = \lambda l$$

をもてば，正の最大の固有値 λ_0 があり，それに対する固有函数 $f(x)$ を

(9) $$\int_a^b (f(x))^2 dx = \lambda_0$$

と標準化したとき，$f(x)$ が最小二乗近似を与える．もし Φ の固有値がすべて $\leqq 0$ ならば，0 が最小二乗近似である．

一般の場合には，φ を反復して，連続写像

(10)
$$(\Phi_1 l)(x) = \int_c^d \varphi(x, y)\left[\int_a^b \varphi(z, y)\, l(z)\, dz\right] dy,$$

$$(\Phi_2 l)(y) = \int_a^b \varphi(x, y)\left[\int_c^d \varphi(x, z)\, l(z)\, dz\right] dx$$

を作る．もし φ が連続ならば，Φ_1，Φ_2 は完全連続で，両者

は0以外は同一の固有値をもち，最大の正の固有値 ν に対するそれぞれの固有函数 $f(x)$, $g(y)$ を

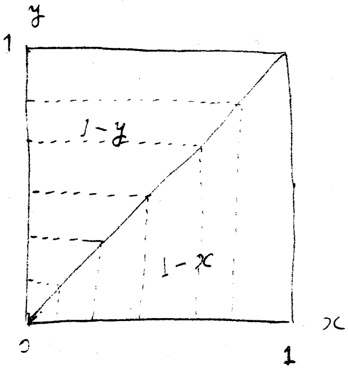
$$\int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_c^d (g(y))^2 dy = \nu \tag{11}$$

と標準化したものが，所要の最小二乗近似を与える．ν が単一固有値ならば，f, g は $f \to cf$, $g \to g/c$ （c は 0 でない定数）という変換を除いて，一意的に定まる．

この場合も近似が正確であるための必要十分条件は，Φ (Φ_1, Φ_2) がただ一つ正の固有値をもち，他がすべて0であることである．Φ (Φ_1, Φ_2) の一つの固有値が十分に大きく，他の固有値が小さければ，近似はかなりよいはずである．冒頭にのべた偏微分方程式 $\Delta u + f$ の場合，境界値＝0の下で数値的に計算してみた限りでは，最大固有値が他にくらべて圧倒的に大きい，という状況がおこっていた．したがって固有函数展開の第1項にあたる積の形一つだけで，十分よく近似できたことがうなづける．しかしこれだけではなお不完全で，固有値を計算しなくても，その評価から，上記のような状況がどのような問題に対していえるのか，前もって判定するような方法がほしい（これも私の宿題である）．

4　一つの例

いかにも人工的な例であるが、解析的にきれいに答がでた一例をあげる。これは対称な場合である。



$0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ において

$$\varphi(x, y) = \min(1-x,\ 1-y)$$

を近似する。この等高線は折れ線であり、曲面はピラミッドの 1/4 になる。

これは対称におりかえし、$-1 \leqq x \leqq 1$, $-1 \leqq y \leqq 1$ で境界値 0 の偶函数としてよい。固有方程式は

$$\lambda f(x) = \int_0^x (1-x) f(y)\, dy + \int_x^1 (1-y) f(y)\, dy$$

である。これを2回微分すると（右辺の形から微分可能なことがわかり、その形からもう一回微分できることがわかる）

$$\lambda f''(x) + f(x) = 0$$

となる。この偶函数の解は

$$f(x) = \cos(x/\sqrt{\lambda})$$

であり、$x = \pm 1$ で 0 になるという境界条件から

$$1/\sqrt{\lambda} = \pi(n+1/2) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

つまり

$$\lambda = 1/[\pi^2(n+1/2)^2]$$

である。最大の固有値は $n = 0$ にあたる $4/\pi^2$ で、つぎ

は $4/9\pi^2$, $4/25\pi^2$, --- となり，2番目との比は9であってかなり大きい．1項の最小二乗近似は (9) により

$$f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}$$

であり，残差ノルムは

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \left(\varphi(x,y) - f(x)\cdot f(y)\right)^2 dx\,dy = \int_0^1\!\!\int_0^1 (\varphi(x,y))^2 dx\,dy - \lambda^2$$
$$= \frac{1}{6} - \frac{16}{\pi^4} \fallingdotseq 0.00241$$

である．また $|\varphi(x,y) - f(x)\cdot f(y)|$ 自体の値の最大は $x=y=0$ でおこる．その値は

$$1-(8/\pi^2) \fallingdotseq 0.1894$$

である．── これはむしろ意外によい近似である．そして $(0,0)$ のごく近くを除けば，誤差は 0.1 以下である．

$[0,1]$ をN等分した離散的な分点に対する φ の値を a_{ij} としたときの固有値も計算することができ，最大固有値は，$N\to\infty$ のとき $4/\pi^2$ に収束する．

この結果は 情報処理 1968年1月号に発表予定であるが，前記の「宿題」について，いま少し考察を深めてまとめてみたいと考えている．